# Standard Representation Curve of $\pi_1(M^3)$ (3次元多様体の構造と位置の問題)



小林, 一章

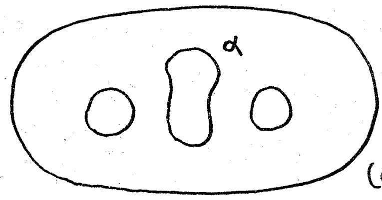
数理解析研究所講究録
369巻 1979年 128-143



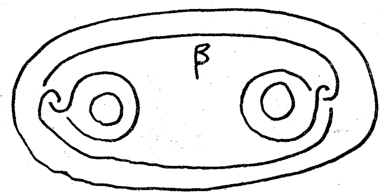
# Standard representation curve of $\pi_1(M^3)$.

北大 教養　小林一章

本稿ではコンパクト向きづけ可能な3次元多様体Mの基本群$\pi_1(M^3)$の元をある意味で標準的な単純閉曲線で表現する事を考えます。ある意味で標準的という事は，例えば下図の(a)




(a)




(b)

(b)のようにgenus 2のハンドル体の内部にある2つの閉曲線α,βを考える時，α，βは共にホモトピック0ですが$1 \in \pi_1(M)$を表現する閉曲線としては，αを考える方がいろいろな面で好都合です。このように"標準的"な閉曲線にふさわしい，いくつかのモデルがあるのですが，それらに該当する"標準的な表現曲線"の定義を与え，そこから導かれる種々の性質を調べるのが本稿の目的です。

対象とするのはPL-カテゴリーの範囲とします。

定義. $M^3$を向きづけ可能な3次元多様体とし, $\alpha$, $\beta$を$M^3$内の単純閉曲線とします。この時$\alpha$と$\beta$がparallelとは
$^\exists$埋め込み $f: S^1\times[0,1]\longrightarrow M^3$ $\ni$ $f(S^1\times\{0\})=\alpha$, $f(S^1\times\{1\})=\beta$
なる時と定義します。$\alpha$と$\beta$がparallelの時$\alpha /\!/ \beta$とかき, $\alpha$とparallelな単純閉曲線の集合を$P_\alpha$とかく。

定義. $M^3$を上の定義と同じとし, $\alpha$, $\beta$を$M^3$内の単純閉曲線で$\langle\alpha\rangle=0$ in $H_1(M:Z)$とする。($\langle\alpha\rangle$は$\alpha$のホモロジー類).
次の条件を満足するとき, $\alpha$と$\beta$は singular parallel と定義する。$^\exists$map $f: S^1\times[0,1]\longrightarrow M^3$ $\ni$ (1) $f(S^1\times\{0\})=\alpha$, $f(S^1\times\{1\})=\beta$
(2) $0<{}^\exists\varepsilon_1<{}^\exists\varepsilon_2<1$ $\ni$ $^\forall t\in(\varepsilon_1,\varepsilon_2)$に対し $f(S^1\times[0,t])\cong f(S^1\times[t,1])\cong f(S^1\times[0,1])$ 且つ $^\forall t_1\in[0,\varepsilon_1)$, $^\forall t_2\in(\varepsilon_2,1]$に対し $f|S^1\times[0,t_1]$と$f|S^1\times[t_2,1]$は埋め込みである。(3) $f$が埋め込みでない時$\alpha$によってboundされる任意の向きづけ可能な曲面$F_\alpha$に対し$F_\alpha\cap\beta=\phi$ (up to ambient isotopy of M keeping $\alpha$ fixed, i.e. $^\exists$cont. family of homeomorphisms $\{\varphi_t\}_{t\in[0,1]}: M^3\longrightarrow M^3$ $\ni$ $\varphi_t|\alpha=id.$ & $\varphi_1(F_\alpha)\cap\beta=\phi$).　$\alpha$と$\beta$がsingular parallelの時$\alpha \tilde{/\!/} \beta$とかき$\alpha$とsingular parallelな単純閉曲線の集合を$SP_\alpha$とかく。上の条件(1), (2)のみを満足するとき$\alpha$と$\beta$はweak singular parallelといい, $\alpha \underset{w}{\tilde{/\!/}} \beta$とかく。この時は$H_1(M:Z)$で$\langle\alpha\rangle=0$という条件は不要です。

注1. $M^3$が3次元球面$S^3$で$\alpha$と$\beta$が上の(3)の条件を満足する$\Longrightarrow$ $\alpha$と$\beta$はホモロジカル unlinking。

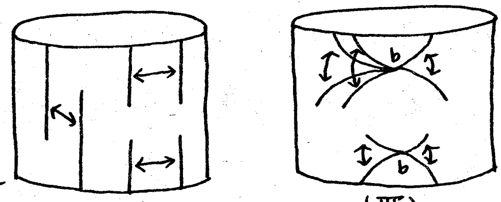
注2. singular parallel, parallel という関係は同値関係のうち推移律をみたさない。

定義. $\alpha$が$\omega \in \pi_1(M^3)$の standard representation curve とは$\omega=[\alpha]$ ($[\alpha]$は$\alpha$のホモトピー類)で, $\alpha$と singular parallel となる$M^3$内の任意の単純閉曲線は$\alpha$と parallel となる事である。即ち$SP_\alpha = P_\alpha$となる事である。

一般に Smythe [S] によって$\alpha \simeq \beta$ (ホモトピック)のとき
$^\exists$写像 $f: S^1 \times [0,1] \longrightarrow M^3 \ni f(S^1 \times \{0\}) = \alpha$, $f(S^1 \times \{1\}) = \beta$ で更に$S(f)$は次の3つのタイプ I, II, III のみであるとしてよい。ここで$S(f) = Cl\{x \in S^1 \times I \mid \# f^{-1}f(x) \geqq 2\}$: $f$の特異点の集合.

0

1



(I) (II). (III)

($b$は branch point (分岐点)).
(I)は$C, C'$が$f$の2重線(即ち$f(C)=f(C')$)で$\partial C = p \cup q$, $\partial C' = p' \cup q'$とすると$p \in S^1 \times \{0\}$, $p' \in S^1 \times \{1\}$, $q, q' \in S^1 \times (0,1)$.
(II)は上の記号の下で$p, p' \in S^1 \times \{0\}$または$p, p' \in S^1 \times \{1\}$そして$q, q' \in S^1 \times (0,1)$. (III)は$S^1 \times \{0\}$または$S^1 \times \{1\}$からの2重線の tree $T$で1つの分岐点を共有する。更にこの時$^\exists$ 2-ball $B^2 \subset S^1 \times I \ni$

$B^2 \supset T$, $B^2 \cap \partial(S^1 \times I) \cong B^1$ (1-ball) & $B^2 \cap (S(f) - T) = \phi$.

( $X$ が多様体のとき $\partial X$, Int $X$ は各々 $X$ の境界, 内部を表す。)

補題1. $M^3$ を向きづけ可能な3次元多様体とし, $\alpha, \beta$ を Int $M$ に含まれる2つの単純閉曲線とする。このとき $\alpha \approx \beta$ (ambient isotopic) $\Longleftrightarrow$ $^\exists$ 写像 $f: S^1 \times [0,1] \longrightarrow M^3 \ni f(S^1 \times \{0\}) = \alpha$, $f(S^1 \times \{1\}) = \beta$ & $S(f)$ は type I の singularities のみから成る。

略証. ($\Longrightarrow$) piping technique を使う事により $^\exists$ map $f: S^1 \times [0,1] \longrightarrow M^3 \ni f(S^1 \times \{0\}) = \alpha$, $f(S^1 \times \{1\}) = \beta$, $S(f)$ は type I, II, III のみ, しかも $F(x,t) = (f(x,t), t)$ によって定義される $F: S^1 \times [0,1] \longrightarrow M \times [0,1]$ は locally flat level preserving embedding になっている。(従って Hudson - Zeeman [H-Z] により $F$ は ambient isotopy で cover される). そして $F$ が埋め込みという事から $S(f)$ は type II の singularity をもたず, また $F$ が ambient isotopy で cover される事より type III の singularities は $F|S^1 \times (0,1)$ のみを変えて除去出来る。

($\Longleftarrow$) 写像 $f: S^1 \times [0,1] \longrightarrow M$ は $f(S^1 \times \{0\}) = \alpha$, $f(S^1 \times \{1\}) = \beta$ で $S(f)$ は type I の singularities のみをもつとする。$F: S^1 \times [0,1] \longrightarrow M \times [0,1]$ を $F(x,t) = (f(x,t), t)$ とおくと, $S(f)$ が type I の singularity のみからなる事から level preserving embedding である。そして $pF = f$ で $f$ が immersion である事から locally flat で

ある事が示される。それ故 Isotopy covering theorem [H-Z] により $\alpha \approx \beta$ である。』

$I_\alpha$ を $\alpha$ と ambient isotopic な simple closed curves の集合とし，$SP^w_\alpha$ を $\alpha$ と weak singular parallel な simple closed curves の集合とする。

定理 1。$M^3$ を向きづけ可能な 3 次元閉多様体とし，$\alpha$ を $M$ に含まれる単純閉曲線とする。

(1) $SP^w_\alpha = I_\alpha$。そして $\langle\alpha\rangle = 0$ in $H_1(M:Z)$ なら $SP_\alpha \subset I_\alpha$.

(2) $\alpha \approx \beta$ のとき，$SP^w_\alpha = P_\alpha \Leftrightarrow SP^w_\beta = P_\beta$。更に $\langle\alpha\rangle = 0$ in $H_1(M:Z)$ なら $SP_\alpha = P_\beta \Leftrightarrow SP_\beta = P_\beta$.

略証. (1) 補題 1 を使えば $SP^w_\alpha \subset I_\alpha$ を示すには $\alpha \mathbin{/\!\!/\!\!\!\!\sim} \beta$ なる $\beta$ に対し，type I の singularity しかもたない map $f: S^1 \times [0,1] \longrightarrow M$ で $f(S^1 \times \{0\}) = \alpha$，$f(S^1 \times \{1\}) = \beta$ なるものの存在を示せばよい。そこで先ず $g: S^1 \times [0,1] \longrightarrow M$ を $\beta \in SP^w_\alpha$ を表現しているmap とする。$S(g)$ の triple points の個数，branch points の個数は $g(S^1 \times [0,1])$ の homeomorphism type の不変量だから $\alpha \mathbin{/\!\!/\!\!\!\!\sim} \beta$ の定義の条件 (2) より 3 重点，分岐点をもたない事がわかる。従って $g$ は type III の singularity はもたない。次に type II の singularity または ribbon type の singularity があっても適当な $t \in (0,1)$ を取ると $\alpha \mathbin{/\!\!/\!\!\!\!\sim} \beta$ の (2) を満足しない事がわかる。従って

$g$はtype Iのsingularityしかもたない。∴ $SP_\alpha^\omega \subset I_\alpha$. 逆に$g$がtype Iのsingularityしかもたなければ(即ち補題1によって$g$は$\alpha \approx \beta$を表現している) $S^1 \times I$の適当な座標変換を行なう事によって$I_\alpha \subset SP_\alpha^\omega$が示される。

(2). $\alpha \approx \beta$だから$f(\alpha)=\beta$となる位相同形写像$f: M \longrightarrow M$があり，それによって求める結果が得られる。』

補題2. $M^3$を向きづけ可能なコンパクト多様体で$\partial M \neq \phi$とする。$\alpha \subset \partial M^3$; $\beta, \gamma \subset \mathrm{Int}\, M^3$なる単純閉曲線$\alpha, \beta, \gamma$に対しもし$\alpha /\!/ \beta$, $\beta \approx \gamma$なら$\alpha /\!/ \gamma$である。更に$\partial M^3 \cong S^2$で$\alpha /\!/ \beta$, $\beta \not\approx \gamma$なら実は$\beta /\!/ \gamma$である。

略証 (前半). $\alpha /\!/ \beta$, $\beta \approx \gamma$だから$^\exists$埋め込み$f: S^1 \times [0,1] \longrightarrow M^3$ ∋ $f(S^1 \times \{0\}) = \alpha$, $f(S^1 \times \{1\}) = \beta$. $^\exists$写像$g: S^1 \times [1,2] \longrightarrow M^3$ ∋ $g(S^1 \times \{1\}) = \beta$, $g(S^1 \times \{2\}) = \gamma$ 且つ $S(g)$はtype I のsingularitiesのみ. $f=g$ on $S^1 \times \{1\}$としてよい。$F = f \cup g$とおくと$\alpha \subset \partial M$だから$S^1 \times \{0\} \cap S(F) = \phi$. その事と$\alpha, \gamma$を動かさないpiping techniqueを使って(即ち$F|S^1 \times (0,2)$のみを変化させて) $F$のsingularityを除去出来る. ∴ $\alpha /\!/ \gamma$.

(後半). $\alpha \subset \partial M^3 \cong S^2$で$\alpha /\!/ \beta$だから$^\exists$embedding $h: B^2 \longrightarrow M$ ∋ $h(\partial B^2) = \beta$. そして$\beta \not\approx \gamma$より$h(B^2) \cap \gamma = \phi$. また$g: S^1 \times [1,2] \longrightarrow M^3$を$\beta \not\approx \gamma$を表現している写像とし$h = g$ on $S^1 \times \{1\} = \partial B^2$

とする。$G = g \cup h$ とおき $p \in B^2 - S(G)$ を取り $U(p, B^2) \subset B^2 - S(G)$ となるように取る。$h(\partial U(p, B^2)) = \beta'$ とおくと前半と同様にして $\beta' /\!/ \gamma$ が示せる。そこで $^{\exists}$埋め込み $G_1 : S^1 \times [0,1] \to M \ni G_1(S^1 \times \{0\}) = \beta'$, $G_1(S^1 \times \{1\}) = \gamma$. また $h$ が埋め込みで $\gamma \cap h(B^2) = \phi$ だから $\beta /\!/ \beta'$ in $M - \gamma$. それ故 $^{\exists}$位相同形写像 $\varphi : M \to M \ni \varphi(\beta') = \beta$, $\varphi | \gamma = id$. そこで $\varphi G_1$ によって $\beta /\!/ \gamma$ 」

注. 後半の証明から明らかなように $\langle \alpha \rangle = 0$ in $H_1(M ; \mathbb{Z})$, $\partial M \cong S^2$ でなくとも $\beta \approx \gamma$ であり且つ $^{\exists}$埋め込み $h : S^1 \times [0,1] \to M$, $^{\exists}$写像 $f : S^1 \times [1,2] \to M \ni$ (1) $h(S^1 \times \{1\}) = \beta$, $h = f$ on $S^1 \times \{1\}$ (2) $f$ は $\beta \approx \gamma$ を表現している. (3) $S(F) \cap (S^1 \times \{0\}) = \phi$ (ただし $F = h \cup f$) (4) $\mathrm{Im}\, h \cap \gamma = \phi \implies \beta /\!/ \gamma$ が証明出来る。

定理2. $\alpha$ が $\mathbb{R}^3$ での non-trivial knot $\iff SP_\alpha \subsetneqq P_\alpha$.

略証. ($\Rightarrow$). $\alpha$ を $\mathbb{R}^3$ 内の non-trivial knot とし $\mathbb{R}^3$ の平行移動を使って $\alpha$ と split している knot $\beta$ を作ると $\beta \in SP_\alpha$. $\alpha$ と $\beta$ を split している2次元球面を $S_0^2$ とおく。もし $\beta \in SP_\alpha$ なら $^{\exists}$埋め込み $f : S^1 \times [0,1] \to \mathbb{R}^3 \ni f(S^1 \times \{0\}) = \alpha$, $f(S^1 \times \{1\}) = \beta$. $\alpha$ と $\beta$ が split しているから $f^{-1}(\mathrm{Im} f \cap S_0^2)$ の component で $S^1 \times [0,1]$ 内で $S^1 \times \{t\}$ に ambient isotopic なものがある。それの $f$ による像を $\gamma$ とすると $\alpha \approx \gamma \approx \beta$ 所が $\gamma \subset S_0^2$ だから $\gamma$ は

trivial knot. これは矛盾. $\therefore \beta \in SP_\alpha - P_\alpha$.

($\Leftarrow$) $\alpha$がtrivial knotなら $SP_\alpha = P_\alpha$ を示す。$\beta \in SP_\alpha$ とすると $\exists$埋め込み $f: B^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \ni f(\partial B^2) = \alpha$. また写像 $g$ は $\alpha \overset{\sim}{/\!/} \beta$ を表現しているとすると補題2の後半より $\alpha /\!/ \beta$. $\therefore SP_\alpha = P_\alpha$ □

系. $R^3$(または$S^3$)には $I_\alpha \supsetneqq SP_\alpha$ となるknot $\alpha$ がある。下図のWhitehead link がその例を示している。

$\beta \in I_\alpha - SP_\alpha$.

$\alpha$ $\beta$.

補題3. (1) $M^3$を向きづけ可能な閉多様体($\partial M \neq \phi$ でも $\partial M \cong S^2$ なら良い), $\alpha$を$M^3$内の単純閉曲線とする。すると

$Im(H_1(\partial U(\alpha, M) : Z) \xrightarrow{i_*} H_1(M - \mathring{U}(\alpha, M) : Z))$ は無限群である。従って特に$\langle \alpha \rangle$が$H_1(M : Z)$で有限位数($\langle \alpha \rangle = 0$ も含む)をもてば$\langle m_\alpha \rangle$が$H_1(M - \mathring{U}(\alpha, M) : Z)$で無限位数をもつ(ここで$m_\alpha$は$\partial U(\alpha, M)$のmeridian curve).

(2) $M^3$を向きづけ可能なコンパクト多様体とする。$M^3$内の単純閉曲線$\alpha$は$\langle \alpha \rangle = 0$ in $H_1(M : Z)$ とする。$F_1, F_2$を$\alpha$によってboundされるnon-singular orientable surfacesとし$\partial U(\alpha, M) \cap F_i = C_i$ $(i=1,2)$ とする。($\partial U(\alpha, M)$ を十分小さく取って$\partial U(\alpha, M) \cap F_i \subset$ boundary collar of $F_i$ とすれば$C_i$は$\partial U(\alpha, M)$上の単純閉曲線としてよい). このとき$\langle m_\alpha \rangle$が$H_1(M - \mathring{U}(\alpha);$

$\mathbb{Z}$）で無限位数をもてば$\partial U(\alpha, M)$上で　$C_1 \approx C_2$である。

略証(1). $\mathbb{Q}$を有理数体とする。$(M-\mathrm{Int}\,U(\alpha,M), \partial U(\alpha,M))$の$\mathbb{Q}$係数ホモロジー完全系列を考えると，もし$\mathrm{Im}\, i_*$が有限群（従って$\mathbb{Q}$係数で$\mathrm{Im}\, i_* = 0$）なら$H_1(\partial U(\alpha,M);\mathbb{Q}) = 0$が出て$\partial U(\alpha,M) \cong S^1 \times S^1$に矛盾.

(2). $\langle C_1 \rangle = \langle C_2 \rangle$ in $H_1(\partial U(\alpha,M);\mathbb{Z})$を示せばよい。$C_i /\!/ \alpha$ in $U(\alpha,M)$だから$H_1(\partial U(\alpha,M);\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \cong \{\langle m_\alpha \rangle\} \oplus \{\langle C_i \rangle\}$ そこで$\langle C_2 \rangle = \langle C_1 \rangle + p\langle m_\alpha \rangle$ $(p \in \mathbb{Z})$とかける。もし$p \neq 0$ なら条件より$H_1(M-\mathrm{Int}\,U(\alpha,M);\mathbb{Z})$で$i_* \langle C_2 \rangle \neq 0$. これは矛盾.
$\therefore p = 0$. ┘

$V \cong \overset{g}{\natural}(S^1 \times B^2)$を（種数$g$の）ハンドル体とする。$\pi_1(V)$の standard representation curves を研究するときは$SP_\alpha$の定義の中の$\langle \alpha \rangle = 0$ in $H_1(V;\mathbb{Z})$という条件は強すぎる。$V$は常に$\mathbb{R}^3$に埋め込むことが出来るから，その事を使って singular parallel の定義を次の様にかえる。"埋め込み$V \subset \mathbb{R}^3$が1つ固定されているとする。この時$V$内の2つの単純閉曲線$\alpha$, $\beta$が singular parallel $(\alpha \underset{R}{\widetilde{/\!/}} \beta)$ とは$\alpha \underset{w}{\widetilde{/\!/}} \beta$であって且つ$\alpha$によって bound される任意の non-singular orientable surface $F_\alpha$ in $\mathbb{R}^3$に対し$F_\alpha \cap V$ の component のうち$\alpha$を含むものを$F_\alpha^0$とおき，条件(3)として$\alpha$と$\beta$の間の写像$f$が埋め込みでな

いとき $F_\alpha^0 \cap \beta = \phi$ を満足すると定義する" この singular parallel の定義によって $\alpha$ と singular parallel な単純閉曲線の集合を $SP_\alpha^R$ とかく. $\alpha$ が $\pi_1(V)$ の元 $\omega$ の R-standard representation curve とは今迄と同様に $[\alpha]=\omega$ で $SP_\alpha^R = P_\alpha$ のときと定義する。 上の $F_\alpha^0$ を $F_\alpha$ の $\alpha$-component とよぶ.

定理3. $V \cong \natural^g (S^1 \times B^2)$ を $\mathbb{R}^3$ 内のハンドル体とする。

(1) $V$ 内の単純閉曲線 $\alpha$ によって bound される任意の向きづけ可能な曲面 $F_\alpha$ in $\mathbb{R}^3$ に対し，その $\alpha$-component が $S^1 \times I$ と位相同型 (up to ambient isotopy of $\mathbb{R}^3$ keeping $\partial F_\alpha = \alpha$ fixed) $\Longrightarrow$ $\alpha$ は $\pi_1(V)$ のある元の R-standard representation curve.

(2) $V$ 内の単純閉曲線 $\alpha$ が $\pi_1(V)$ のある元の R-standard representation curve $\Longrightarrow$ $B^3 \cap \alpha \cong B^1$ なる $V$ 内の任意の 3-ball $B^3$ に対し $(B^3, B^3 \cap \alpha) \cong (B^1 \times B^2, B^1 \times \{0\})$.

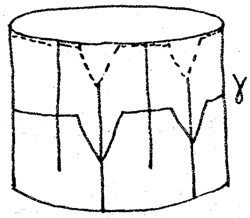
(3) $\alpha \sim 0$ (ホモローグ) in $V$ のとき, $\alpha$ が R-standard $\Longleftrightarrow$ $\alpha$ が standard.

略証 (1) Lemma 2 の後の注と Lemma 3 を使えばよい。

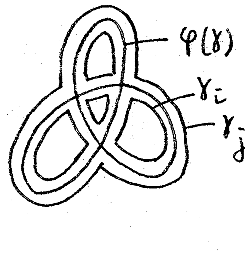
(2) $B^3 \cap \alpha \cong B^1$ だが $(B^3, B^3 \cap \alpha) \cong (B^1 \times B^2, B^1 \times \{0\})$ とならない $B^3$ があれば $\partial B^3 \cap \alpha$ を動かさずに $\mathrm{Int} B^3 \cap \alpha$ を"平行移動"させて定理2と同様な方法で $\beta \in SP_\alpha^R - P_\alpha$ なる $\beta$ を作れる。これは $\alpha$ についての条件に矛盾.

(3) 一般に $SP^R_\alpha \subset SP_\alpha$。従って(⇐)は明らか。(⇒) $\beta \in SP_\alpha$ とし $\alpha$ と $\beta$ の間の写像を $f$ とする。もし $f$ が embedding でないなら $\alpha$ によって bound される $V$ 内の曲面 $F_\alpha$ に対し $F_\alpha \cap \beta = \phi$. $\tilde{F}_\alpha$ を $\alpha$ によって bound される $\mathbb{R}^3$ 内の任意の曲面とする。補題3によって $U(\alpha, V) \cap \tilde{F}_\alpha = U(\alpha, V) \cap F_\alpha$ だから $\tilde{F}_\alpha$ の $\alpha$-component $\tilde{F}^0_\alpha$ に対し $\tilde{F}^0_\alpha \cap \beta \neq \phi$ なら $F_\alpha \cap \beta \neq \phi$ となり矛盾. ∴ $\beta \in SP^R_\alpha$ そして仮定より $SP^R_\alpha = P_\alpha$ ∴ $\beta \in P_\alpha$. 故に $\alpha$ は standard.∥

<u>Splitting</u>. (向きづけ可能な3次元多様体 $M^3$ 内の2つの単純閉曲線 $\alpha, \beta$ の splitting について).




$\beta \in SP^\omega_\alpha$ で $\alpha$ と $\beta$ の間の写像を $f$ とする。$S^1 \times I$ で図のような点線に平行な線の $f$ による像を $\gamma$ とする。このとき $\gamma \subset (\alpha \xleftrightarrow{f} \beta)$ とかく。$\gamma$ は自分自身に交わる曲線。$\gamma$ の $M$ における正則近傍 $U(\gamma, M)$ は種数 $p$ のハンドル体. ここで $p = \#\{S(f)$ の type I の singularity の成分$\} \times \frac{1}{2} + 1$. $\natural^p(S^1 \times [-1,1] \times [-1,1])$ を $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^1$ の中の種数 $p$ のハンドル体で $\natural^p(S^1 \times [-1,1] \times [-1,1]) \cap (\mathbb{R}^2 \times \{0\}) = \natural^p(S^1 \times [-1,1] \times \{0\})$ となっているものとする。$\varphi : U(\gamma, M) \longrightarrow \natural^p(S^1 \times [-1,1] \times [-1,1])$ を $\varphi(\gamma) \subset \mathbb{R}^2 \times \{0\}$ となるような位相同型写像とする。$\varphi(\gamma)$ を $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$ の中で図のように $p+1$ 個の交わらない単純閉曲線 $\gamma'_1, \dots, \gamma'_{p+1}$ に



分ける。$\varphi^{-1}(\gamma_i')=\gamma_i$ とおく。

定義。$\langle\alpha\rangle=0$ in $H_1(M^3;\mathbb{Z})$ で且つ $\beta\in SP_\alpha^{?}$ とする。次の条件(1),(2)を満足している時 $\alpha$ と $\beta$ は split していると定義する。(1) $\alpha$ によって bound される任意の向きづけ可能な曲面 $F_\alpha$ 及び $\beta$ によって bound される任意の向きづけ可能な曲面 $F_\beta$ に対し $\beta\cap F_\alpha=\phi$ (up to ambient isotopy of M keeping $\alpha$ fixed), $\alpha\cap F_\beta=\phi$ (up to ambient isotopy of M keeping $\beta$ fixed).
(2) $\beta\in SP_\alpha$ を示す写像及び上の位相同型写像 $\varphi$ を適当に選んで上のような単純閉曲線 $\gamma_1,\cdots,\gamma_{p+1}$ を作った時 $SP_{\gamma_i}=P_{\gamma_i}$ $(i=1,2,\cdots,p+1)$ となっている。(従ってこの時各 $\gamma_i$ は $\langle\gamma_i\rangle=0$ in $H_1(M;\mathbb{Z})$ が前提条件になっている。)

定理 4. $\alpha$ は $\langle\alpha\rangle=0$ in $H_1(M;\mathbb{Z})$ なる M 内の単純閉曲線とする。$\alpha$ がある $w\in\pi_1(M^3)$ の standard representation curve なら $B^3\cap\alpha\cong B^1$ となる任意の 3-ball $B^3\subset M^3$ に対し $(B^3,B^3\cap\alpha)\cong(B^2\times B^1,\{0\}\times B^1)$.

略証. $B^3\cap\alpha\cong B^1$ だが $(B^3,B^3\cap\alpha)\cong(B^1\times B^2,B^1\times\{0\})$ とならない 3-ball $B^3\subset M^3$ があったとする。$U(\alpha,M^3)$ を十分小さくとると $T\equiv U(\alpha,M)\cup B^3$ は $S^1\times B^2$ に位相同型. そこで定理 3 (2) と同様にして T 内の平行移動によって T 内では $\beta\in SP_\alpha-P_\alpha$ なる $\beta$ が取れる. (実際は $\alpha\nsim 0$ in T だから T を $R^3$ に移して考え

る) そしてもし $\beta \in P_\alpha$ in $M^3$ なら実は $\partial T$ の longitude curve $l_T$ が $M-\mathring{T}$ で non-singular 2-ball $B^2$ を bound する事が示され，それに沿って $T$ を surgery して $\alpha, \beta$ を内部に含む 3-ball $B_0^3$ が存在し，その中で $\alpha /\!/ \beta$ という事が示される。そしてこれと $(B^3, B^3 \cap \alpha) \not\cong (B^1 \times B^2, B^1 \times \{0\})$ という事から矛盾がでる。

定理5. $M^3$ を向きづけ可能な閉多様体とし，$\alpha$ を $M^3$ に含まれる単純閉曲線とする。このとき $\alpha$ が $1 \in \pi_1(M^3)$ の standard representation curve $\Longleftrightarrow$ $\alpha$ が $M^3$ で non-singular 2-ball を bound する.

略証 ($\Longrightarrow$). $\alpha \simeq 0$ in $M^3$ だから $\alpha$ は $M^3$ で singular 2-ball を bound する。Smythe [S] の方法でその singularity は type II, III のみとしてよい。そして $\alpha$ が standard representation curve という事と定理4を使うと type III の singularity はないと仮定して良い。そこで $^\exists$写像 $f : D^2 \longrightarrow M^3 \ni f(\partial D^2) = \alpha$, $S(f)$ は type II のみでその成分の個数 $2p$ は最小とする。すると $U(f(D^2), M)$ は種数 $p$ のハンドル体。$V \cong \natural^{p}(S^1 \times B^2)$ を $R^3$ 内の標準的なハンドル体とし，$h : U(f(D^2), M^3) \longrightarrow V$ を位相同型写像とする。$V$ の中で平行移動を利用して $\beta' \in SP_{h(\alpha)} - P_{h(\alpha)}$ なる閉曲線を取る。$\beta = h^{-1}(\beta')$ とおくと $\beta \in SP_\alpha$ となるが条件より $\beta \in P_\alpha$. そこで $^\exists$埋め込み $g : S^1 \times [0,1] \longrightarrow M^3 \ni g(S^1 \times \{0\}) = \alpha$, $g(S^1 \times \{1\}) = \beta$,

$S^1\times\{0\}=\partial D^2$ 上で $f=g$. この $g$ を使って $S(f)\neq\phi$ なら矛盾である事を示す。($\Leftarrow$) $\alpha$ が non-singular 2-ball を bound し, $\beta\in SP_\alpha$ とすると Lemma 2 の後の注によって $\alpha /\!/ \beta$ が示せる。$\lrcorner$

定理6. $M^3$ をホモロジー球面とし, $\alpha$ を $M^3$ 内の任意の単純閉曲線とすると, $\alpha$ と split している単純閉曲線で $\alpha /\!/ \beta$ となる $\beta$ が取れる。

略証 $F_\alpha$ を $\alpha$ によって bound される種数最小の non-singular orientable surface とする。$U(F_\alpha, M^3)\equiv T_0$ とすると $T_0$ は種数 $2p$ のハンドル体. ここで $p=F_\alpha$ の種数。$T=U(T_0, M^3)$ とする。$\natural^{2p}(S^1\times B^2)$ を $R^3$ 内の種数 $2p$ のハンドル体とし $h: T\longrightarrow \natural^{2p}(S^1\times B^2)$ を位相同型写像とする。$h(\partial T_0)$ 上に standard longitude curves $l_1\vee l_2\vee\cdots\vee l_{2p}$ を取り, $U(l_1\vee\cdots\vee l_{2p}, h(T-\mathrm{Int}\,T_0))=T_1'$, $h^{-1}(T_1')=T_1$ とおく。$R^3$ の平行移動を利用して $\beta'\in SP_{h(\alpha)}$ であって $h(T_0)\cap T_1'$ を含む2次元球面によって($R^3$ 内で) split している $\beta'$ を $T_1'$ 内に取り $h^{-1}(\beta')=\beta$ とする。この $\beta$ が求める閉曲線である事を示す。$\lrcorner$

系。$M^3$ は $\pi_1(M^3)\neq\{1\}$ であるようなホモロジー球面とする。
$\Longrightarrow$ standard representation curve をもつ $\pi_1(M^3)$ の元 $\omega$ がある。

略証. $\pi_1(M^3)$はアーベル群でない。そこで$^\exists\eta(\neq 1)\in\pi_1(M^3)$ $\ni\varphi(\eta)=0$ ($\varphi:\pi_1(M^3)\longrightarrow H_1(M^3;\mathbb{Z})$はHurewitz準同型)となる元$\eta$があり,$\alpha$を$\eta$の表現曲線とする。$SP_\alpha=P_\alpha$なら$\omega=\eta$とおけばよい。$SP_\alpha\supsetneqq P_\alpha$のとき定理6より$\alpha$とsplitしていて$\alpha\,\widehat{\parallel}\,\beta$となる閉曲線$\beta$がある。そこで$\gamma\subset(\alpha\xleftrightarrow{f}\beta)$を取り$\gamma$から交わらない単純閉曲線$\gamma_1,\cdots,\gamma_g$を取ると定義より$SP_{\gamma_i}=P_{\gamma_i}$ $(i=1,2,\cdots,g)$、そして$[\alpha]\neq 1$だから$^\exists i\ni[\gamma_i]\neq 1$. そこで$\omega=[\gamma_i]$とおけばよい。$\lrcorner$

定理7. $M^3$をホモロジー球面とする。$\omega\in\pi_1(M^3)$が*standard representation curve*をもてば*ambient isotopy*を除いて一意である。

略証. $\alpha,\beta$を$\omega$の*standard representation curves*としたとき$\alpha\approx\beta$を示せばよい。$\alpha\simeq\beta$だから$^\exists$写像$f:S^1\times[0,1]\longrightarrow M^3\ni f(S^1\times\{0\})=\alpha$, $f(S^1\times\{1\})=\beta$且つ$S(f)$は*type* I, II, IIIのみをもつ。そして$\alpha,\beta$が*standard representation curves*という事と定理4から$f$は*type* IIIの*singularity*をもたないとしてよい事が示せる。次に*piping technique*及び*ambient isotopy*によって$^\exists\beta_1\approx\beta$, $^\exists$写像$g:S^1\times[0,1]\longrightarrow M^3\ni g(S^1\times\{0\})=\alpha$ $g(S^1\times\{1\})=\beta_1$且つ$S(g)$は$S^1\times\{1\}$に足をもつ*type* IIの*singularity*のみ. 定理6より$\beta_1$と*split*していて$\gamma\in SP_{\beta_1}$となる$\gamma$が

である。$SP_{\beta_1} = P_{\beta_1}$だから$^\exists$埋め込み $h: S^1 \times [1,2] \to M^3 \ni h(S^1 \times \{1\}) = \beta_1$, $h(S^1 \times \{2\}) = \gamma$ 且つ $h = g$ on $S^1 \times \{1\}$. この$h$を使って実は $S(g) = \phi$ である事を示す. 従って $\alpha /\!/ \beta_1 \approx \beta$. $\therefore \alpha \approx \beta$ 』

## References


[H-Z]. J.F.P. Hudson and E.C. Zeeman; 'On combinatorial isotopy' Publ. I.H.E.S. 19 (1964) 69–94.

[R] D. Rolfsen: 'Isotopy of links in codimension two' J. the Indian Math. Soc. 36 (1972) 263–278.

[S] N. Smythe: 'Handlebodies in 3-manifolds' Proc. Amer. Math. Soc. 26 (1970) 534–538.